Printed Pages – 8

I-176

B.Sc. (Part-I) Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - III

(Vector Analysis and Geometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी पाँच प्रश्न हल कीजिए। प्रत्येक इकाई से दो भाग करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer all five questions. Solution of 'two' parts from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) तीन शून्येतर सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के लिए दर्शाइये कि

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

यदि और केवल यदि $(\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b} = 0$ या यदि और केवल यदि $\vec{a}$ और $\vec{c}$ समरेख हैं।

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are non zero vectors, show that

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

is true iff $(\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b} = 0$ or iff $\vec{a}$ and $\vec{c}$ are collinear.

(b) एक कण P, r त्रिज्या वाले वृत्त पर स्थिर कोणीय वेग $w = \frac{d\theta}{dt}$ से गतिमान है। सिद्ध कीजिये कि उसका त्वरण $-w^2r$ है।

A particle P is moving on a circle of radius r with constant angular velocity $w = \frac{d\theta}{dt}$. Show that acceleration is $-w^2r$.

(c) पृष्ठों $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ और $z = x^2 + y^2 - 3$ के बीच का कोण बिन्दु (2, –1, 2) पर ज्ञात कीजिये।

Find the angle between the surfaces $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and $z = x^2 + y^2 - 3$ at the point (2, –1, 2).

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) यदि $\vec{r} = t\hat{i} - t^2\hat{j} + (t-1)\hat{k}$ तथा $\vec{s} = 2t^2\hat{i} - 2t\hat{k}$ तब $\int_0^2 (\vec{r} \times \vec{s})dt$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\vec{r} = t\hat{i} - t^2\hat{j} + (t-1)\hat{k}$ and $\vec{s} = 2t^2\hat{i} - 2t\hat{k}$ then find the value of $\int_0^2 (\vec{r} \times \vec{s})dt$.

(b) यदि S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ का पृष्ठ है, तब गॉउस के डाइवर्जेन्स प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि

$$\iint_S \vec{r} \cdot \hat{n} dS = 108\pi$$

If S is a surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, then by Gauss divergence theorem show that $\iint_S \vec{r} \cdot \hat{n} dS = 108\pi$

(c) स्टोक्स प्रमेय का सत्यापित कीजिए, जब $\vec{F} = (2x - y)\hat{i} - yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k}$ है, जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का ऊपरी अर्द्धपृष्ठ है तथा C उसकी परिसीमा है।

Verify Stoke's theorem when $\vec{F} = (2x - y)\hat{i} - yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k}$, where S is the upper half of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and C is its boundary.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) निम्नलिखित शांकव का अनुरेखण कीजिए तथा उसकी नाभियों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए :

$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$

Trace the following conic and find the coordinates of its foci :

$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 16x - 14y + 17 = 0$

(b) सिद्ध कीजिए कि दो वृत्त जो दो बिन्दुओं (0, a) तथा (0, –a) से गुजरते हैं और जो रेखा y = mx + c को स्पर्श करते हैं, समकोण पर काटेगी, यदि $c^2 = a^2(2 + m^2)$

Prove that the two circles which pass through the points (0, a) and (0, –a) and touch the line y = mx + c will cut orthogonally if $c^2 = a^2(2 + m^2)$.

(c) सिद्ध कीजिए कि शांकव $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ पर स्थिर दो बिन्दु जिनके दैशिक कोण α एवं β हैं, एक व्यास के सिरे होंगे, यदि $\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2} = \frac{e+1}{e-1}$

Prove that two points on the conic $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ whose vectorical angles are α and β respectively, will be extremities of a diameter if $\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\frac{\beta}{2} = \frac{e+1}{e-1}$

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) त्रिज्याओं r_1 और r_2 के दो गोले लाम्बिक प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या $\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$ है।

Two spheres of radii r_1 and r_2 intersect orthogonally. Prove that the radius of common circle is .

(b) सिद्ध कीजिये कि उस शंकु का समीकरण, जिसका शीर्ष मूल-बिन्दु है, x, y, z में द्वितीय घात का एक समघात समीकरण है।

Prove that the equation of cone with its vertex at the origin is a homogeneous-equation of second degree in x, y, z.

(c) उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक रेखा y = mx, z = nx के समान्तर हैं तथा दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, z = 0 को प्रतिच्छेद करते हैं।

Find the equation of the cylinder whose generator is parallel to line y = mx, z = nx and intersects the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, z = 0.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) वह प्रतिबन्ध ज्ञात करें जब समतल $\ell x + my + nz = p$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ को स्पर्श करता हो।

To find the condition when the plane $\ell x + my + nz = p$ touches to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(b) दर्शाइये कि प्रत्येक निकाय का एक जनक अति परवलयज के प्रत्येक बिन्दु से जाता है।

Show that one generator of each system passes through every point of the hyperboloid.

(c) समीकरण का समानयन प्रमाणिक रूप में कीजिए :

$2x^2 – 7y^2 + 2z^2 – 10yz – 8zx – 10xy + 6x + 12y – 6z + 5 = 0$

Reduce the equation of the standard form :

$2x^2 – 7y^2 + 2z^2 – 10yz – 8zx – 10xy + 6x + 12y – 6z + 5 = 0$